

Tercer examen parcial de Probabilidad I

2026-1 FES Acatlán

Sábado 22 de noviembre

1. Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha(1+x)^{-(\alpha+1)}, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{e.o.c.,} \end{cases}$$

para $\alpha > 0$. Defina la transformación

$$Y = \frac{1}{1+X}.$$

- (a) Determine el soporte de la variable transformada Y .
(b) Encuentre la función de densidad de Y .
2. En una aseguradora se han registrado 64 reclamaciones independientes de un mismo tipo de siniestro. Se sabe que cada reclamación tiene media 1000 pesos y desviación estándar 100 pesos.

Use el Teorema Central del Límite para aproximar la distribución del monto total reclamado y estime la probabilidad de que dicho monto exceda los 65 864 pesos.

3. Considere la siguiente distribución conjunta de dos variables aleatorias X e Y ,

$p_{X,Y}(x,y)$	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$
$X = -1$	0.05	0.10	0.05
$X = 0$	0.10	0.30	0.10
$X = 1$	0.05	0.15	0.10

- (a) Diga y compruebe si X e Y son independientes.
(b) Calcule $E(X)$, $E(Y)$ y $E(X+Y)$ usando las marginales y también calcule $E(X+Y)$ directamente a partir de la conjunta para comprobar que $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.
4. En un estudio veterinario interesa estimar la prevalencia de una enfermedad en una población de animales. Seleccionar cuidadosamente el tamaño muestral es importante por razones éticas y económicas: evitar muestrear animales de más y garantizar precisión suficiente en la estimación.

Se conoce por estudios previos que la prevalencia verdadera es $p = 0.10$ (10%). Se toma una muestra aleatoria de n animales y se calcula la proporción muestral $\hat{p}$ de animales infectados. Note que $n\hat{p} \sim \text{Bin}(n, p)$

Se desea elegir n de modo que la proporción observada $\hat{p}$ caiga entre 0.08 y 0.12 (es decir, ± 0.02 alrededor de p) con probabilidad aproximadamente 0.95.

- (a) Usando el Teorema de Moivre-Laplace (aproximación normal a la binomial), escriba la expresión aproximada para

$$\mathbb{P}(0.08 \leq \hat{p} \leq 0.12).$$

- (b) Determine el tamaño mínimo de muestra n que asegura que esa probabilidad sea aproximadamente 0.95.

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990